Методика численного решения модели, двойственной к модели Леонтьева
Асхакова Ф. Х.

Асхакова Фатима Хызыровна / Ashakova Fatima Hyzyrovna – кандидат экономических наук, доцент, кафедра информатики и вычислительной математики, Карачаево-Черкесский государственный университет имени У. Д. Алиева, г. Карачаевск

Аннотация: *в статье описана методика, позволяющая найти методом простой итераций неотрицательное решение балансовой модели, двойственной к модели Леонтьева. На основании данной методики разработан алгоритм неотрицательного решения рассматриваемой модели. Осуществлена его программная реализация.*
Ключевые слова: *двойственная модель, метод итераций.*

Рассмотрим модель, двойственную к модели Леонтьева вида [2]:

$$p = A^T p + v, \qquad (1)$$

где $p = col(p_1, \ \ldots, p_n)$ – вектор цен производимых отраслями продуктов, $v = col(v_1, \ldots, v_n)$ – вектор добавленной стоимости, A^T – матрица, транспонированная по отношению к матрице A модели Леонтьева.

Модель (1) называется прибыльной, если она имеет неотрицательное решение $p \geq \theta$.

При решении модели (1), методом простой итераций необходимо предварительно выяснить, устойчиво ли решение модели (1) относительно начальных условий?

Для этого рассмотрим устойчивость получаемого решения модели (1) к возмущению элементов матрицы A^T и вектора v, т.е. относительно небольшие искажения элементов в A^T и v модели (1) должны привести к небольшим погрешностям результата решения p.

Известно, что решение модели (1) устойчиво, если матрица A^T хорошо обусловлена ($cond\ A^T \leq 1000$).

Построим решение модели (1) методом простой итераций:

$$p_{m+1} = A^T p_m + v, \ p_0 = \theta, \ m = 0,1,2,\ldots \qquad (2)$$

Согласно [4] матрица A^T из (1) прибыльна, если $\|A^T\| < 1$.

Согласно [1] при выполнении условия $\|A^T\| < 1$ решение системы (1) во-первых, существует и единственно, во-вторых, итерационный процесс (2) сходится при любом начальном приближении p_0 и справедлива оценка

$$\|p_m - \overline{p}\| \leq \|A^T\| \|p_0 - \overline{p}\|, \qquad (3)$$

где $\overline{p}$ – решение (1).

Обратим внимание, что в (1) ограничение $p \geq 0$ отсутствует. Из указанных результатов [3] и [4] следует вывод.

Теорема. Пусть $\|\mathrm{A}^T\|$ из (1) удовлетворяет условию $\|\mathrm{A}^T\| < 1$. Тогда 1) решение системы (1) существует и единственно; 2) итерационный процесс (2) сходится к неотрицательному решению $\overline{p}$ (системы (1)) и при любом начальном приближении p_0 имеет место оценка (3).

На основании теоремы разработан алгоритм построения решения системы (1).

1. Ввести матрицу A;
2. Ввести вектор v;
3. Задать начальное приближение p_0;
4. Задать погрешность $\varepsilon > 0$ вычисления $\overline{p}$;
5. Транспонировать матрицу A в A^T.
6. Вычислить число обусловленности матрицы A^T.
7. Если $cond\ A^T \leq 1000$, то система имеет устойчивое решение, иначе система имеет неустойчивое решение.

8. Проверить выполнимость условия $\left\|A^T\right\| < 1$;

9. Если выполнены условия пунктов 7, 8, то вычисления производить по формуле (2) до тех пор, пока не будет достигнута требуемая погрешность $\varepsilon > 0$.

10. Если условие пункта 8 не выполняется, то следует выбрать другую норму $\left\|A^T\right\|$.

Данный алгоритм реализован на языке C ++ в программу «model_L».

Пример. Пусть:

$$A = \begin{pmatrix} 0.18 & 0 & 0.03 & 0.0001 \\ 0.4 & 0.03 & 0.01 & 0 \\ 0.0001 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0.0001 & 0.0001 & 0 & 0.01 \end{pmatrix};$$

$$v = \begin{pmatrix} 3147 & 6651 & 4427 & 3692 \end{pmatrix}.$$

Тогда введя значения A, v, задав погрешность $\varepsilon = 0.0001$ и начальное приближение $p_0 = \begin{pmatrix} 4147 & 7651 & 5427 & 4692 \end{pmatrix}$, получим:

$$\bar{p} = \begin{pmatrix} 7183.82 & 6857.09 & 5234.54 & 3730.02 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, нашли положительное решение модели, двойственной к модели Леонтьева.

Результаты данной работы обобщают и конкретизируют результаты работ [2], [3].

Литература

1. *Амосов А. А., Дубинский Ю. А., Копченова Н. В.* Вычислительные методы для инженеров: учебное пособие. М.: Высш. шк., 1994. 544 с.
2. *Асхакова Ф. Х., Лайпанова З. М.* Решение модели, двойственной к модели Леонтьева-Форда методом регуляризации (по Тихонову) // Гуманитарные и социально-экономические науки, 2016. № 1. С. 120-124.
3. *Семенчин Е. А., Асхакова Ф. Х.* Построение решения модели Леонтьева методом простой итерации // Современное состояние и приоритеты развития фундаментальных наук в регионах: Труды IV Всероссийской научной конференции молодых ученных и студентов (Краснодар, 1-4 октября 2007). Краснодар: Просвещение-Юг, 2007. Т.2. С. 168-170.
4. Экономико-математические методы и прикладные модели: учебное пособие для вузов / В. В. Федосеев, А. Н. Гармаш, И. В. Орлова и др.; под ред. В. В. Федосеева. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. 304 с.