

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Хайркулова А.А.¹, Исаков С.А.²

¹Хайркулова Алтынай Айтбековна – магистрант;

²Исаков Сагындык Абдрахманович – докторант PhD,
кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений,
Карагандинский государственный университет им. Е.А. Букетова,
г. Караганда, Республика Казахстан

Аннотация: в статье рассматривается первая краевая задача для функционально-дифференциального уравнения теплопроводности в четверти плоскости. Нагруженное слагаемое – след производной дробного порядка на многообразии $X = t$. Решение задачи сводится к исследованию интегрального уравнения Вольтерра второго рода с ядром, имеющим слабую особенность.

Ключевые слова: нагруженное уравнение, дробная производная, интегральное уравнение Вольтерра, единственное решение.

В монографии А.М. Нахушева [1] отмечено, что за последние 35 лет появилось значительное число публикаций, проблемно-ориентированных на нагруженные уравнения. Значительную роль в развитии теории нагруженных уравнений играет и то, что нагруженные уравнения могут выступать как один из способов введения обобщенных решений широких классов уравнений в частных производных и как эффективный метод поиска приближенных решений краевых задач для дифференциальных уравнений. Там же показано, что базовые уравнения линейных математических моделей многих процессов на фрактальных структурах являются нагруженными дифференциальными уравнениями дробного порядка.

Дифференциальные уравнения с частными производными дробного порядка – обобщения уравнений с частными производными целочисленного порядка имеют большое практическое значение, например, такие уравнения, являются математическими моделями различных процессов и явлений в средах с фрактальной структурой. При описании процессов в системах, для которых необходимо учитывать нелокальные свойства по времени и пространству, необходим аппарат дробного интегро-дифференцирования [2]. При этом, существенно то, что в рамках математического аппарата интегро-дифференцирования дробного порядка удастся не только более глубоко осознать известные данные, но и получить принципиально новые результаты.

В монографии [3] нагруженные дифференциальные уравнения интерпретируются как слабые или сильные возмущения дифференциальных уравнений. В работах [4] – [7] показано, что если в дифференциальном уравнении параболического типа нагруженное слагаемое – значения искомой функции или ее производных первого порядка на многообразии $X = t$, то соответствующие краевые задачи являются корректными в естественных классах функций, то есть нагруженное слагаемое – *слабое* возмущение. Если же нагруженным слагаемым является значение производной второго порядка искомой функции на многообразии $X = t$, то нарушается единственность решения первой краевой задачи, то есть в этом случае нагрузку можно интерпретировать как *сильное* возмущение [3].

Целью данной работы является выяснение характера нагрузки дробного порядка $(1 + \beta)$, $0 < \beta < \frac{1}{2}$ в вопросах разрешимости первой краевой задачи для функционально-дифференциального (нагруженного) уравнения теплопроводности.

В области $Q = \{(x, t) : x > 0, t > 0\}$; $0 < \beta < \frac{1}{2}$, рассмотрим краевую задачу

$$u_t - u_{xx} + \lambda \cdot \left\{ {}_0 D_x^{1+\beta} u(x, t) \right\}_{x=t} = f(x, t), \quad (1)$$

$$u(x, 0) = 0; \quad u(0, t) = 0. \quad (2)$$

Здесь λ - комплексный параметр,

$${}_0 D_x^{1+\beta} u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^x \frac{u(\xi, t)}{(x-\xi)^\beta} d\xi \right) - \text{дробная производная Римана-Лиувилля порядка}$$

$$(1 + \beta), \quad 0 < \beta < \frac{1}{2}, \quad t^{-1/2} e^{-t} \cdot \left[{}_0 D_x^{1+\beta} u(x, t) \right]_{x=t} \in L_1(0, \infty),$$

$$e^{-t} \cdot \left[{}_0 D_x^{1+\beta} \int_0^t \int_0^\infty G(x, \xi, t-\tau) \cdot f(\xi, \tau) d\xi d\tau \right] \Big|_{x=t} \in L_1(0, \infty), \quad (3)$$

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right) - \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4t}\right) \right] - \text{функция Грина.}$$

Обратим дифференциальную часть задачи (1) – (2),

$$u(x, t) = -\lambda \int_0^t \int_0^\infty G(x, \xi, t-\tau) \left\{ \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^x \frac{u(\xi, \tau) d\xi}{(x-\xi)^\beta} \right\} \Big|_{\xi=t} d\xi d\tau +$$

$$+ \int_0^t \int_0^\infty G(x, \xi, t-\tau) \cdot f(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

и с учетом соотношения:

$$\int_0^\infty G(x, \xi, t-\tau) d\xi = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)$$

получим следующее представление решения задачи (1) – (2):

$$u(x, t) = -\lambda \int_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right) \left\{ \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^x \frac{u(\xi, \tau) d\xi}{(x-\xi)^\beta} \right\} \Big|_{\xi=t} d\xi d\tau +$$

$$+ \int_0^t \int_0^\infty G(x, \xi, t-\tau) \cdot f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (3.1)$$

Введем обозначение

$$\mu(\tau) = \left\{ \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^x \frac{u(\xi, \tau) d\xi}{(x-\xi)^\beta} \right\} \Big|_{x=t}, \quad (4)$$

тогда соотношение (3) запишется в виде:

$$u(x, t) = -\lambda \int_0^t \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right) \cdot \mu(\tau) d\tau + f_1(x, t). \quad (5)$$

Для нахождения неизвестной функции $\mu(t)$ произведем следующую процедуру: возьмём производную порядка $(1+\beta)$ по переменной X в обеих частях соотношения (5) и положим затем $X = t$, тогда с учётом обозначения (4) получим:

$$\mu(t) - \lambda \int_0^t K_{1+\beta}(t, \tau) \mu(\tau) d\tau = f_2(t). \quad (6)$$

Ядро интегрального уравнения (6) имеет вид:

$$K_{1+\beta}(t, \tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^x \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{t-\tau}}\right) d\xi}{(x-\xi)^\beta} \Big|_{x=t}, \quad (7)$$

$$f_2(t) = \left[{}_0 D_x^{1+\beta} \int_0^t \int_0^\infty G(x, \xi, t-\tau) \cdot f(\xi, \tau) d\xi d\tau \right] \Big|_{x=t}$$

Найдем явный вид ядра, для этого вычислим:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^x \operatorname{erf}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{t-\tau}}\right) \cdot \frac{d\xi}{(x-\xi)^\beta} = \left\| x-\xi=\eta \right\| = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^x \operatorname{erf}\left(\frac{x-\eta}{2\sqrt{t-\tau}}\right) \cdot \frac{d\eta}{\eta^\beta} = \\
& = \left\| \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{erf}\left(\frac{x-\eta}{2\sqrt{t-\tau}}\right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x-\eta}{2\sqrt{t-\tau}}} e^{-z^2} dz \right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4(t-\tau)}} \right\| = \\
& = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{t-\tau}} \int_0^x e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4(t-\tau)}} \frac{d\eta}{\eta^\beta} \right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}(t-\tau)} \cdot \frac{1}{x^\beta} - \frac{1}{\sqrt{\pi}(t-\tau)} \frac{2}{4(t-\tau)} \int_0^x \frac{x-\eta}{\eta^\beta} e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4(t-\tau)}} d\eta = \\
& = \left\| x-\eta=\xi \right\| = \frac{1}{\sqrt{\pi}(t-\tau) \cdot x^\beta} - \frac{1}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \int_0^x \xi \cdot (x-\xi)^{-\beta} \cdot e^{-\frac{\xi^2}{4(t-\tau)}} d\xi = \\
& = \frac{1}{\sqrt{\pi}(t-\tau) \cdot x^\beta} - \frac{B(1-\beta, 2)}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \cdot x^{2-\beta} \cdot {}_2F_2\left(1, \frac{3}{2}; \frac{3-\beta}{2}, \frac{4-\beta}{2}; -\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right).
\end{aligned}$$

Здесь ${}_2F_2(a_1, a_2; b_1, b_2; z)$ – гипергеометрическая функция, представимая в виде обобщенного гипергеометрического ряда:

$${}_2F_2(a_1, a_2; b_1, b_2; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdot (a_2)_k}{(b_1)_k \cdot (b_2)_k} \cdot \frac{z^k}{k!};$$

где $(a)_k = a(a+1)\dots(a+k-1) = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}$ – символ Похгаммера,

$$B(1-\beta, 2) = \frac{\Gamma(1-\beta) \cdot \Gamma(2)}{\Gamma(3-\beta)} = \frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(3-\beta)}.$$

Значит окончательно, имеем:

$$\begin{aligned}
K_{1+\beta}(t, \tau) &= -\frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(1-\beta)} \cdot \frac{1}{t^\beta \sqrt{t-\tau}} + \\
&+ \frac{1}{2\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(3-\beta)} \cdot \frac{t^{2-\beta}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \cdot {}_2F_2\left(1, \frac{3}{2}; \frac{3-\beta}{2}, \frac{4-\beta}{2}; -\frac{t^2}{4(t-\tau)}\right).
\end{aligned}$$

Замечание 1. $\lim_{\beta \rightarrow 1-0} K_{1+\beta}(t, \tau) = \frac{t}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{t^2}{4(t-\tau)}} = K_2(t, \tau)$ [3], так как

$${}_2F_2(a_1, a_2; a_1, a_2, z) = e^z.$$

Замечание 2. $K_{1+\beta}(t, \tau)_{\beta=0} = K_1(t, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}(t-\tau)} e^{-\frac{t^2}{4(t-\tau)}}$ [4].

Действительно $K_1(t, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}(t-\tau)} - \frac{t^2}{4\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \cdot {}_2F_2\left(1, \frac{3}{2}; \frac{3}{2}, 2; -\frac{t^2}{4(t-\tau)}\right)$. Преобразуем

функцию

$${}_2F_2\left(1, \frac{3}{2}; \frac{3}{2}, 2; -z\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1)_k}{(2)_k} \cdot \frac{z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(k+1)!} \cdot \frac{z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} =$$

$$= \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \left\| e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right\| = \frac{1}{z} (e^z - 1).$$

Значит,

$$\begin{aligned} K_1(t, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} - \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot \frac{t^2}{4(t-\tau)} \cdot \left(-\frac{4(t-\tau)}{\alpha^2(t)} \right) \left[e^{-\frac{t^2}{4(t-\tau)}} - 1 \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} + \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{t^2}{4(t-\tau)}} - \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} = \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{t^2}{4(t-\tau)}} \end{aligned}$$

Эти два замечания верны, так как это же можно получить непосредственно, положив в (1)–(2) $\beta = 0$, $\beta = 1$.

Определим порядок особенности ядра интегрального уравнения (6) – $K_{1+\beta}(t, \tau)$ (при $\tau \rightarrow t$ и $t \rightarrow 0$). Очевидно, что если $\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t K_{1+\beta}(t, \tau) d\tau = 0$, то данное ядро имеет слабую особенность, в

противном случае интегральное уравнение (5) будет особым интегральным уравнением Вольтерра, которое может иметь не единственное решение. Воспользуемся следующим представлением ядра:

$$\Gamma(1-\beta)K_{1+\beta}(t, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cdot \frac{1}{t^\beta} - \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \frac{2}{4(t-\tau)} \int_0^x \frac{t-\eta}{\eta^\beta} e^{-\frac{(t-\eta)^2}{4(t-\tau)}} d\eta = k_1(t, \tau) - k_2(t, \tau).$$

$$\text{Очевидно, что } \int_0^t k_1(t, \tau) d\tau = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)} \cdot t^\beta} d\tau = \frac{2}{\sqrt{\pi}} t^{1/2-\beta}.$$

$$\begin{aligned} \int_0^t k_2(t, \tau) d\tau &= \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{d\eta}{\eta^\beta} \int_{\frac{t-\eta}{2\sqrt{t}}}^\infty e^{-z^2} dz = \int_0^x \frac{1}{\eta^\beta} \operatorname{erfc}\left(\frac{t-\eta}{2\sqrt{t}}\right) d\eta \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \int_0^x \frac{x-\eta}{\eta^\beta} e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4(t-\tau)}} d\eta = \frac{4}{2\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{1}{\eta^\beta} d\eta \int_0^t \frac{x-\eta}{4(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4(t-\tau)}} d\tau = \\ &= \int_0^x (t-\xi)^{-\beta} \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{t}}\right) d\xi = \\ &= -\frac{t^{3/2-\beta}}{\sqrt{\pi}} \cdot B(2, 1-\beta) {}_3F_3\left(1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3-\beta}{2}, \frac{2-\beta}{2} + 1, \frac{3}{2}; -\frac{t}{4}\right) + t^{1-\beta} B(1, 1-\beta). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь

$${}_3F_3(a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdot (a_2)_k \cdot (a_3)_k}{(b_1)_k \cdot (b_2)_k \cdot (b_3)_k} \cdot \frac{z^k}{k!}.$$

Таким образом, имеем ($0 < \beta < \frac{1}{2}$):

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t K_{1+\beta}(t, \tau) d\tau = 0. \quad (9)$$

Значит, при $0 < \beta < \frac{1}{2}$ ядро интегрального уравнения (5) имеет слабую особенность, т.е. методом последовательных приближений можно найти его единственное решение. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $0 < \beta < \frac{1}{2}$, тогда $\forall \lambda \in C, \forall f(x, t) \in L_{\infty}(D) \cap C(D)$ граничная задача (1) - (2) имеет единственное решение $u(x, t) \in L_{\infty}(D) \cap C(D)$.

Список литературы

1. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука, 2012. 232 с.
2. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 272 с.
3. Джениалиев М.Т., Рамазанов М.И. Нагруженные уравнения – как возмущения дифференциальных уравнений. Алматы: ГЫЛЫМ, 2010. 334 с.
4. Жанболова А.К., Каршыгина Г.Ж. О нагруженном уравнении теплопроводности с нагрузкой дробного порядка. // Теоретические и прикладные проблемы математики, механики и информатики: Материалы Международной научной конференции (12-14 июня). Караганда, 2014. С. 25-26.
5. Есбаев А.Н., Жанболова А.К., Петерс С.Н. О первой краевой задаче для слабо-нагруженного параболического уравнения // Вестник КарГУ. серия Математика, 2012. № 4 (68). С. 31-37.
6. Akhmanova D.M., Kosmakova M.T., Ramazanov M.I., Tuimebayeva A.E. On the solutions of the homogeneous mutually conjugated Volterra integral equations // Вестник Карагандинского университета. Сер. Математика, 2013. № 2 (70). С. 153–158.
7. Ахманова Д.М., Джениалиев М.Т., Рамазанов М. И. Об особом интегральном уравнении Вольтерра второго рода со спектральным параметром // Сибирский математический журнал, 2011. Т. 52. № 1. С. 3-14.